مقاومة المواد وحساب الانشاءات 2

Sem. 1

2024-2025

أ.د. نايل محمد حسن

المحاضرة الرابعة

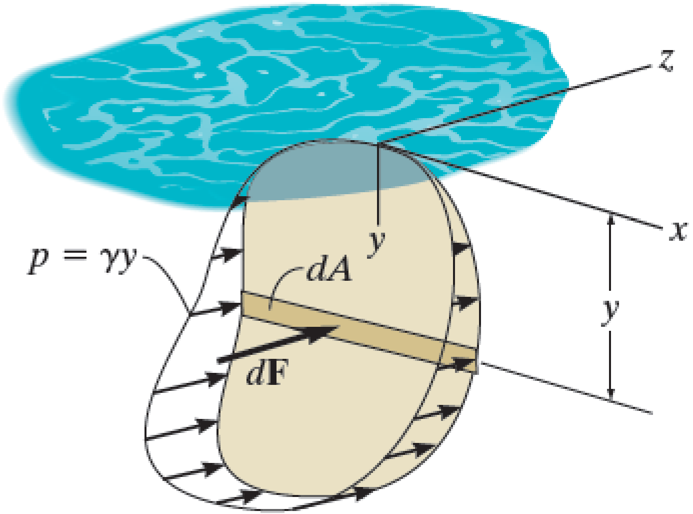
الخصائص الهندسية للمقاطع

عزم العطالة

العزم الثاني للمساحة (عزم العطالة)

تعريف

عندما تؤثر حمولة موزعة شدتها متغيرة خطيا على مساحة ما، فإن حساب عزم الحمولة حول محور ما سيكون من الشكل



$$\int y^2 dA$$

مثلا من اجل الصفيحة المبينة في الشكل المغمورة بالسائل تخضع لضغط **P**

الضغط يتغير خطياً مع العمق يساوي **$P = \gamma\ y$** حيث γ الوزن الحجمي للسائل

$$dF = p\ dA = (\gamma y)\ dA$$

بالتالي عزم القوة بالنسبة للمحور **x**

$$dM = y\ dF = \gamma y2\ dA$$

باجراء تكامل *dM* على كامل المساحة نجد

$$M = \gamma \int y^2 \, dA$$

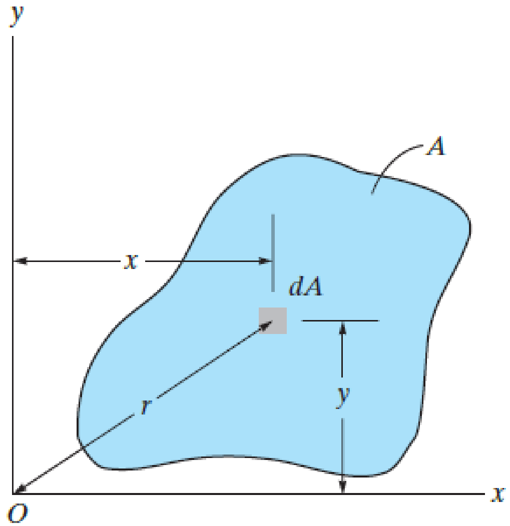
يطلق على التكامل $\int y^2 \, dA$

العزم الثاني للمساحة حول محور ما (المحور x في حالتنا) او عزم العطالة

تعريف عزم العطالة

بالتعريف عزم العطالة لعنصر مساحة تفاضلية ***dA*** حول المحور **x** و **y** هي $dI_x = y^2\ dA$ و $dI_y = x^2\ dA$ من اجل كامل المساحة **A** يحسب عزم العطالة من التكاملات ***dA***

$$I_x = \int_A y^2\, dA$$
$$I_y = \int_A x^2\, dA$$



$$J_O = \int_A r^2\, dA = I_x + I_y$$

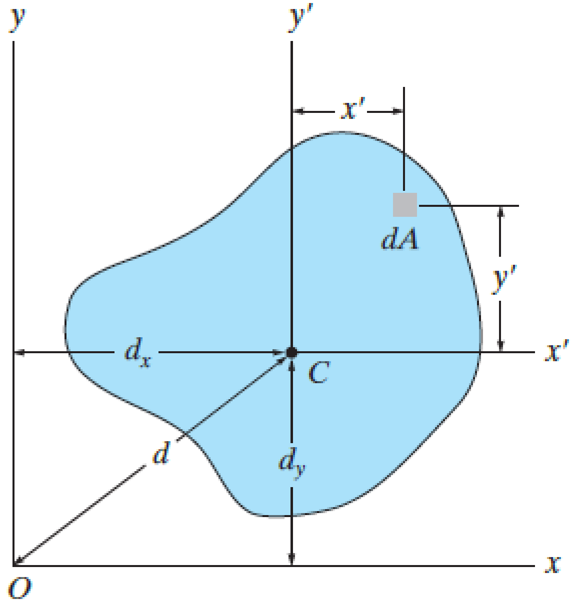
تعريف عزم العطالة القطبي

بالتعريف عزم العطالة القطبي لمساحة تفاضلية ***dA*** حول المحور **z** او القطب **o** هي $dJ_O = r^2\ dA$ حيث **r** هي المسافة العمودية من القطب الى العنصر المساحي ***dA*** ومن اجل كامل المساحة يكون العزم القطبي

تكون قيم عزوم العطالة دائما موجبة وواحدتها هي وحدة طول من الدرجة الرابعة m^4, cm^4, mm^4

نظرية المحاور المتوازية لمساحة

تستخدم هذه النظرية لايجاد عزوم العطالة لمساحة ما حول أي محور موازي للمحاور المركزية x',y'. تعطى عزوم العطالة بالنسبة للمحاور x,y بالعلاقات



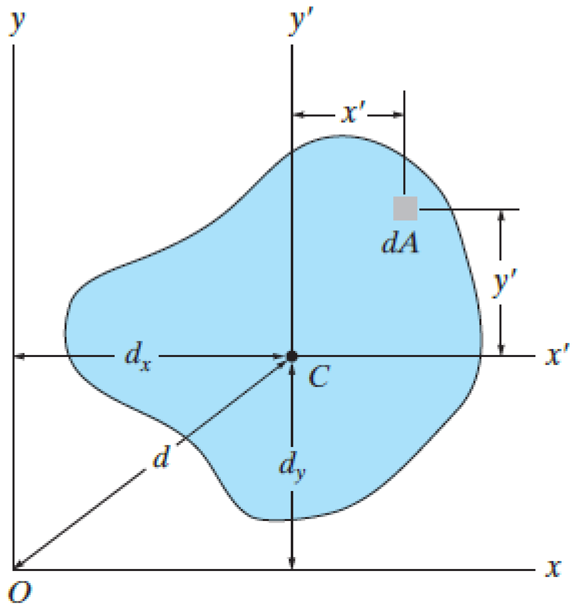
$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2$$

$$J_O = \bar{J}_C + Ad^2$$

نصف قطر العطالة لمساحة ما حول محور

تستخدم في التصميم الانشائي وخاصة تصميم الاعمدة، وهو متعلق بعزم العطالة واحدته وحدة طول. يعطى نصف قطر العطالةلابالعلاقاتلاالتالية



$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}}$$

ملاحظات مهمة

- عزم العطالة هو خاصية هندسية لمساحة ما يستخدم لتحديد مقاومة عنصر انشائي او تحديد موقع قوة محصلة الضغط المؤثرة على الصفيحة المغمورة بالمياه.
- اذا كان عزم العطالة لمساحة ما حول المحاور المركزية معلوم، فإنه يمكن ببساطة حساب العزم حول أي محاور موازية باستخدام نظرية المحاور المتوازية

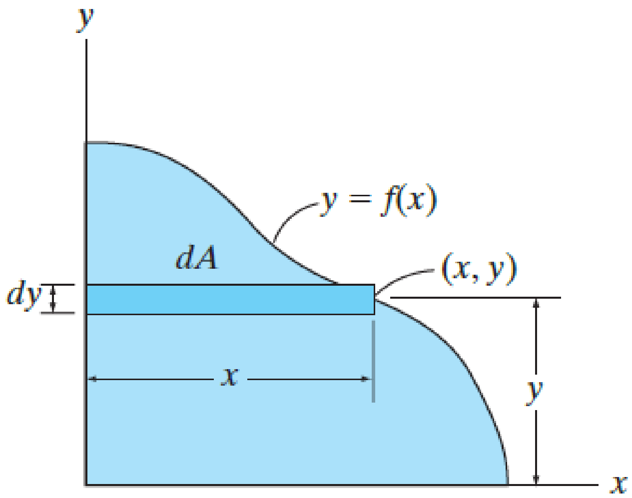
خطوات حساب عزوم العطالة

- الحالة الأولى: وجه طول العنصر بشكل موازي للمحور المراد حساب المساحة حوله

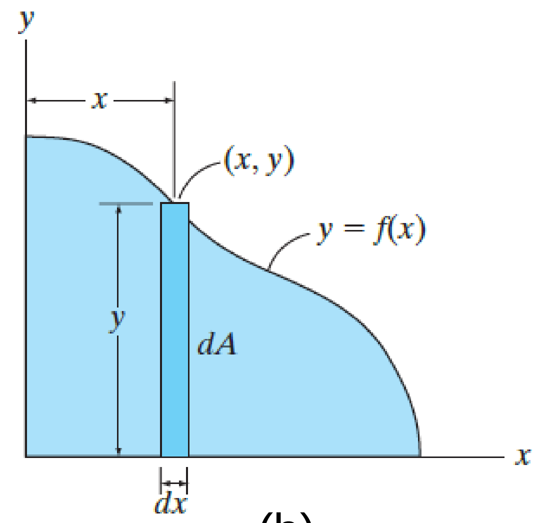
الحالة a في الشكل لحساب عزم العطالة (I_x) حول المحور x

الحالة b لحساب عزم العطالة (I_y) حول المحور y

- الحالة الثانية: يحسب عزم العطالة القطبي بشكل مشابه



(a)



(b)

Example 1

Determine the moment of inertia for the area shown in Fig. with respect to (a) the centroidal x' axis, (b) the axis x_b passing through the base of the rectangle, and (c) the pole or z' axis perpendicular to the x'–y' plane and passing through the centroid C.

Part (a).

$$\bar{I}_{x'} = \int_A y'^2\, dA = \int_{-h/2}^{h/2} y'^2 (b\, dy') = b \int_{-h/2}^{h/2} y'^2\, dy'$$

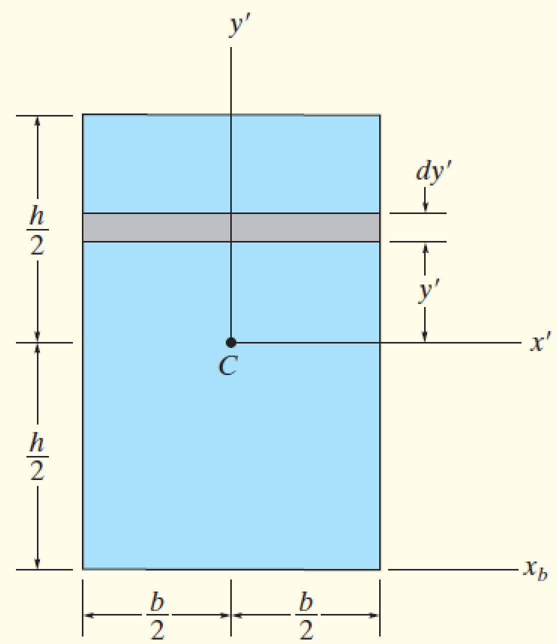
$$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12} b h^3$$

Part (b).

$$I_{x_b} = \bar{I}_{x'} + A d_y^2 \quad = \frac{1}{12} b h^3 + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} b h^3$$

Part (c). $$\bar{J}_C = \bar{I}_{x'} + \bar{I}_{y'}$$

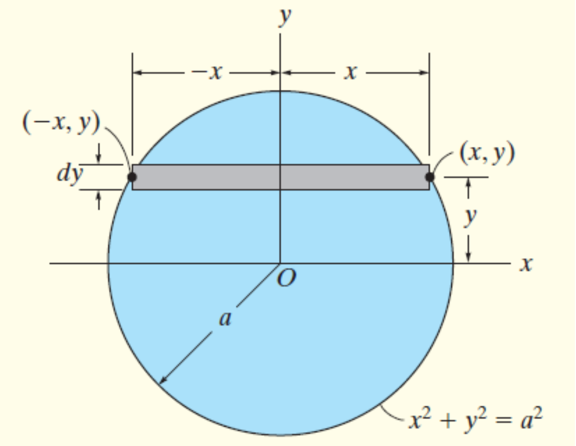
$$\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12} h b^3 \quad \Rightarrow \quad \bar{J}_C = \bar{I}_{x'} + \bar{I}_{y'} = \frac{1}{12} bh(h^2 + b^2)$$



Example 2

Determine the moment of inertia with respect to the x axis for the circular area shown in Fig. .

SOLUTION I



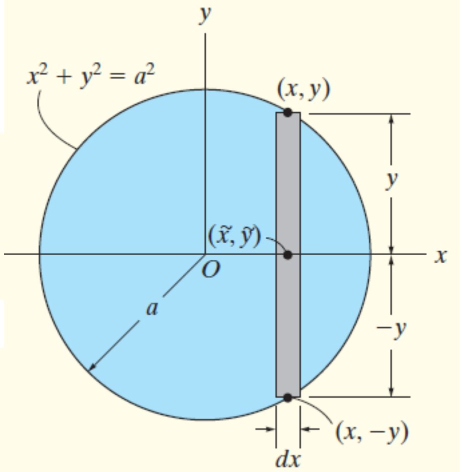
Using the differential element shown in Fig.

since $dA = 2x\,dy$,

$$I_x = \int_A y^2\,dA = \int_A y^2(2x)\,dy$$

$$= \int_{-a}^{a} y^2\left(2\sqrt{a^2 - y^2}\right)dy = \frac{\pi a^4}{4}$$

SOLUTION II



When the differential element shown in Fig. is chosen, the centroid for the element happens to lie on the x axis, and since $\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ for a rectangle, we have

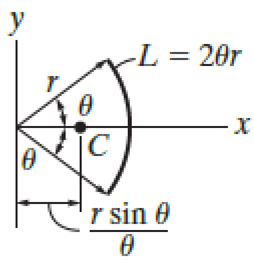
$$dI_x = \frac{1}{12}dx(2y)^3$$

$$= \frac{2}{3}y^3\,dx$$

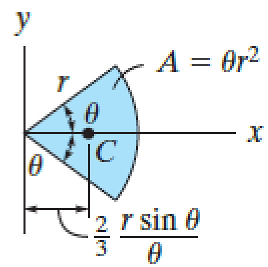
$$I_x = \int_{-a}^{a} \frac{2}{3}(a^2 - x^2)^{3/2}\,dx = \frac{\pi a^4}{4}$$

Geometric Properties of Line and Area Elements

Centroid Location	Centroid Location	Area Moment of Inertia



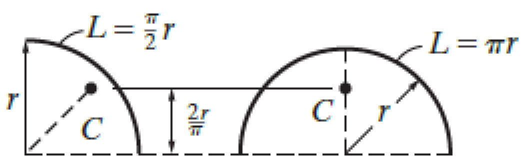
Circular arc segment



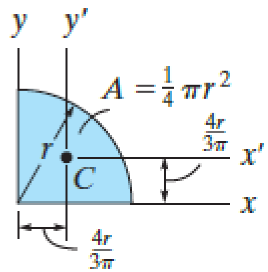
Circular sector area

$$I_x = \frac{1}{4} r^4 \left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$

$$I_y = \frac{1}{4} r^4 \left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$



Quarter and semicircle arcs



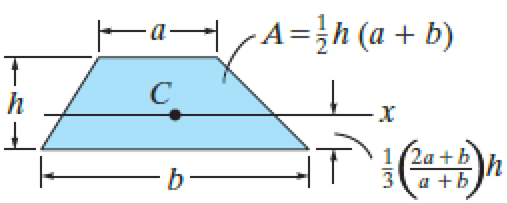
Quarter circle area

$$I_x = \frac{1}{16}\pi r^4$$

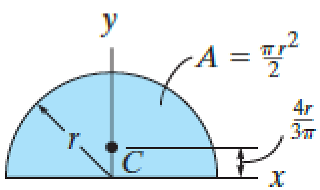
$$I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$$

$$I_{x'} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) r^4$$

$$I_{y'} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) r^4$$



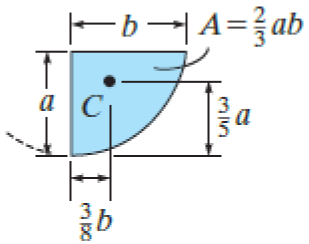
Trapezoidal area



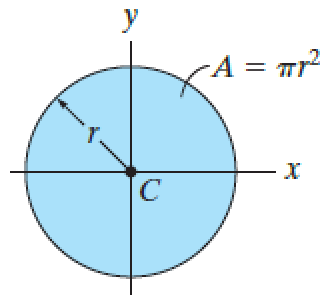
Semicircular area

$$I_x = \frac{1}{8}\pi r^4$$

$$I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$$



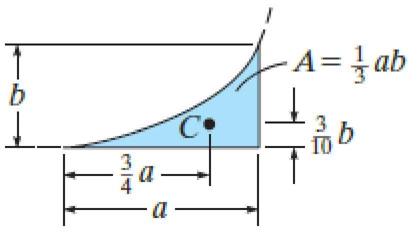
Semiparabolic area



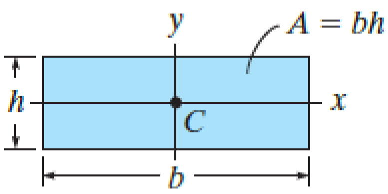
Circular area

$$I_x = \frac{1}{4}\pi r^4$$

$$I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$$



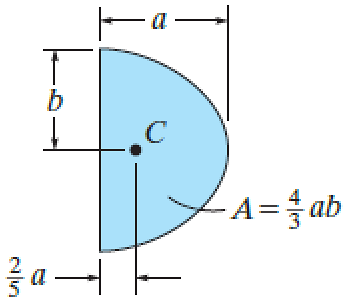
Exparabolic area



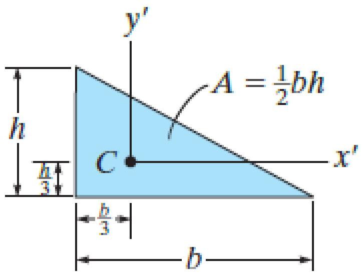
Rectangular area

$$I_x = \frac{1}{12}bh^3$$

$$I_y = \frac{1}{12}hb^3$$



Parabolic area



Triangular area

$$I_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$$

$$I_{y'} = \frac{1}{36}hb^3$$

عزوم العطالة للمقاطع المركبة

MOMENTS OF INERTIA FOR COMPOSITE AREAS

عندما تكون المساحة مركبة مكونة من عناصر عديدة بسيطة، يكون عزم العطالة مكون من سلسلة من عطالات عناصر بسيطة.

خطوات حساب العطالة للعناصر المركبة

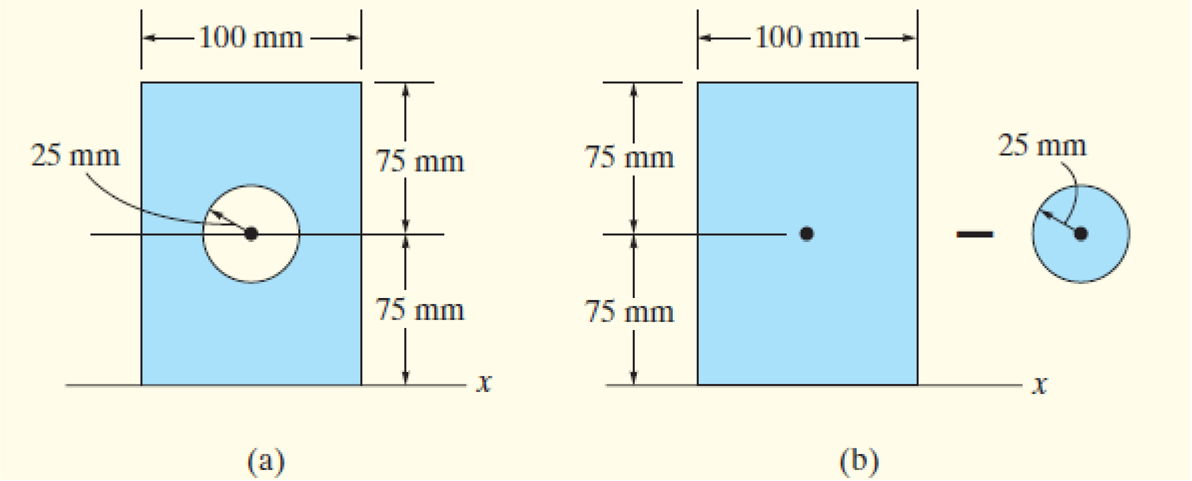
1- يتم تقسيم المساحة المركبة الى عناصر بسيطة معروف بعد مراكزها عن المحاور

2- يكون عزم العطالة الكلي للمساحة المركبة مساو لمجموع عزوم عطالات العناصر بالنسبة لنفس المحور

3- عندما تحوي المساحة المركبة شكل يمثل فجوة او فراغ يتم طرح عطالة هذا الجزء من العطالة الكلية للمساحة بالنسبة لنفس المحور

Example 3

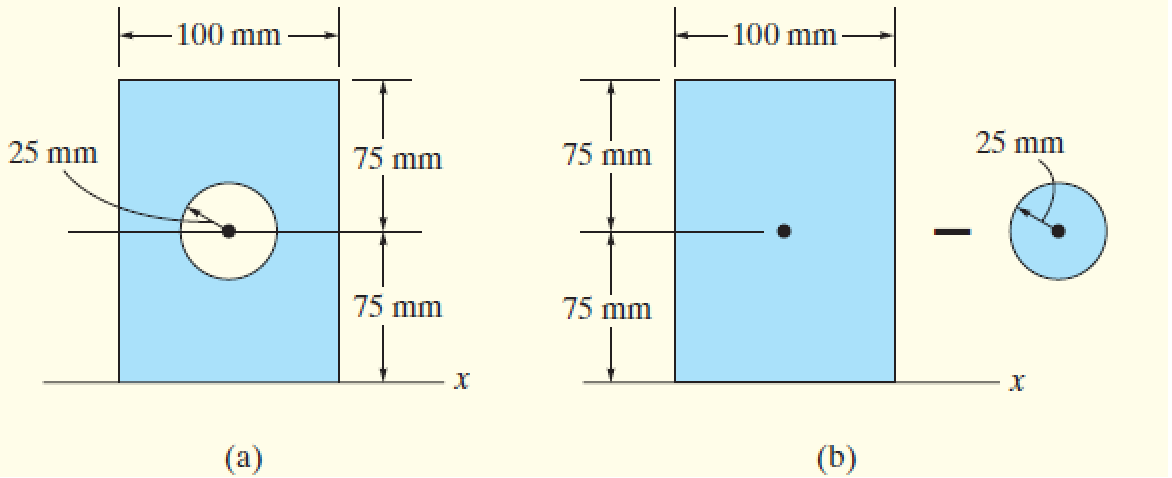
احشب عزم عطالة الشكل الهندسي المبين في الشكل حول المحور x



1- تقسيم الشكل

2- باستخدام نظرية المحاور المتناظرة

$$I_x = \frac{1}{4}\pi r^4 \text{ and } I_x = \frac{1}{12}bh^3,$$



Circle

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$

$$= \frac{1}{4}\pi(25)^4 + \pi(25)^2(75)^2 = 11.4(10^6)\ \text{mm}^4$$

Rectangle

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$

$$= \frac{1}{12}(100)(150)^3 + (100)(150)(75)^2 = 112.5(10^6)\ \text{mm}^4$$

Summation. The moment of inertia for the area is therefore

$$I_x = -11.4(10^6) + 112.5(10^6)$$

$$= 101(10^6)\ \text{mm}^4$$